Chapter 3

黎曼度量与测地线

3.1 黎曼度量

之前我们为了求曲面上曲线的长度，引入了第一基本形式

$$I = ds^2 = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv. \tag{3.1}$$

此时在曲面的每一个点 p的切空间上，第一基本形式给定了切空间上的一个内积：对$U = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$, $V = c\mathbf{r}_u + d\mathbf{r}_v \in T_pS$,

$$I(U,V) = acE + (ad+bc)F + bdG, \tag{3.2}$$

从而决定了曲面上切向量的长度

$$|U| = \sqrt{I(U,U)} = \sqrt{a^2E + 2abF + b^2G}. \tag{3.3}$$

所以曲面上曲线的长度

$$L[\gamma] = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{I(\gamma'(t),\gamma'(t))}dt. \tag{3.4}$$

如果将曲面S看作一个流形，则由I不依赖坐标卡的选取可知 $I \in C^\infty(S, T^*S \otimes T^*S)$. 而且对$\forall U, V \in TS$, $U \neq 0$, 有 $I(U,V) = I(V,U)$, $I(U,U) > 0$.

Riemann认为若想在流形上定义曲线长度, 就要把曲面的第一基本形式推广到流形上。

定义 3.1.1 (黎曼度量)**.** 对微分流形M，若 $g \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M)$满足

- 对称性: 对$\forall U, V \in TM$, 有$g(U,V) = g(V,U)$;
- 正定性: 对$\forall U \in TM$, 有$g(U,U) > 0$,

则称g为流形上的一个黎曼度量. 此时(M,g)被称为黎曼流形.

此时局部上，有(类比于(3.1))

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \tag{3.5}$$

其中，$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

类似于第一基本形式，对$p \in M$, T_pM上向量$X \in T_pM$的长度定义为(类比于(3.3))

$$|X|_g := \sqrt{g(p)(X,X)}. \tag{3.6}$$

局部上，设$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$|X|_g^2 = g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k}, a^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = g_{ij}(p) a^i a^j. \tag{3.7}$$

通过黎曼度量, 类似于(3.4), 我们可以求出流形上曲线的长度. 对流形M上的曲线$\gamma(t)$, 其长度表示为

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g dt, \tag{3.8}$$

其中, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, 在局部上有

$$\gamma'(t) = \frac{dx^1}{dt}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \frac{dx^n}{dt}\frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{3.9}$$

从而若曲线落在某个坐标卡中，曲线长度可表示为

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}} dt. \tag{3.10}$$

注意：黎曼度量g是流形上的一个附加结构。一个流形上可能有很多黎曼度量。但黎曼度量一定存在吗？

命题 3.1.2. *光滑微分流形上一定存在黎曼度量.*

证明. 取流形M上的局部有限坐标覆盖$\{U_\alpha\}$, 与相应的单位分解$\{h_\alpha\}$, s.t. $supp(h_\alpha) \subset U_\alpha$. 设$g_\alpha = \sum_{i=1}^n dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$. 在整个流形上定义 $h_\alpha g_\alpha(p) = \begin{cases} h_\alpha(p) g_\alpha(p) & , p \in U_\alpha, \\ 0 & , p \notin U_\alpha. \end{cases}$ 则$h_\alpha g_\alpha \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M)$.

定义 $g=\sum_\alpha h_\alpha g_\alpha \in C^\infty(M, T^*M\otimes T^*M)$. 我们要证明$g$就是$M$上的一个黎曼度量。

固定$p\in M$, 则存在U_α,使得$h_\alpha(p)>0$. 假设除U_α外还有$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_r}$包含$p$. 因

$$g_{\alpha_\lambda}=\sum_{k=1}^n dx_{\alpha_\lambda}^k\otimes dx_{\alpha_\lambda}^k=\sum_{\lambda=1}^r\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x_\alpha^j}dx_\alpha^i\otimes dx_\alpha^j, \tag{3.11}$$

则

$$g(p)=\left(h(p)\delta_{ij}+\sum_{\lambda=1}^r h_{\alpha_\lambda}(p)\frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x_\alpha^j}\right)dx_\alpha^i\otimes dx_\alpha^j. \tag{3.12}$$

此时 $g_{ij}=h(p)\delta_{ij}+\sum_{\lambda=1}^r h_{\alpha_\lambda}(p)\frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x_\alpha^j}$. 从而有$g_{ij}=g_{ji}$, 即$g$满足对称性.

因$h_{\alpha_\lambda}(p)\geq 0$, $h_\alpha(p)>0$, 对$\forall U\neq 0\in T_pM$,

$$g(p)(U,U)=h_\alpha(p)g_\alpha(p)(U,U)+\sum_{\lambda=1}^r h_{\alpha_\lambda}(p)g_{\alpha_\lambda}(U,U)\geq h_\alpha(p)g_\alpha(p)(U,U)>0. \tag{3.13}$$

即g正定.

所以g是光滑流形M上的一个黎曼度量. □

注: 上面命题是不平凡的. 例如M上不一定存在非正定的$g\in C^\infty(M, T^*M\otimes T^*M)$.
注: 黎曼度量在同一流形上可以有很多个, 但一般不能随便取.

有了黎曼度量, 曲线长度可合理定义. 完全类似于曲面的情形，我们可以发现曲线的长度与曲线的正则参数变化无关, 也与局部坐标系的取法无关.

习题 3.1.3. 请证明：对任意一个定向黎曼流形(M,g),存在一个体积元dv（处处不为0的 n-形式），使得其局部可表示为

$$dv|_U=\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n. \tag{3.14}$$

例 3.1.4. 设流形U为上半平面

$$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\}, \tag{3.15}$$

$$g=\frac{1}{y^2}(dx\otimes dx+dy\otimes dy) \tag{3.16}$$

是U上的一个度量，称为Poincaré度量。

习题 3.1.5. 请计算上半平面Poincaré度量下曲线 $\gamma(t)=\{(0,t)\in\mathbb{R}^2: t\in[a,b], a>0\}$的长度。当$a\to 0$时会发生什么现象？

3.2 测地线

前面我们通过定义黎曼度量定义了流形上曲线的长度。

设$D=\{$连接$p,q\in M$的光滑曲线$\}$, 我们自然将p与q之间的距离定义为$d(p,q)=\inf\limits_{\gamma\in D}L[\gamma]$.

问题:如果极小值可以达到，极小值对应的曲线是什么样子的？

任取一族连接p,q的光滑曲线$\gamma_s(t)$,光滑依赖于$s\in[-\epsilon,\epsilon]$,满足$\gamma_s(a)\equiv p$,$\gamma_s(b)\equiv q$ (用更数学一点的语言,令$Q=[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)$, $\gamma:Q\to M$为光滑映射, $\gamma_s(t):=\gamma(t,s)$). 假设$\gamma_0(t):t\in[a,b]\to M$,是连接$p,q$的最短光滑曲线,则必须有$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}L[\gamma_s]=0$.

此时γ_s的长度为$L[\gamma_s]=\int_a^b\sqrt{g(\gamma_s'(t),\gamma_s'(t))}dt$. 注意到$L[\gamma_s]$不依赖参数$t$的变换，我们可假设取定曲线参数$t$, s.t.

$$\sqrt{g(\gamma_0'(t),\gamma_0'(t))}\equiv 1, \tag{3.17}$$

像曲面上一样我们称t为γ_0的弧长参数。此时

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}L[\gamma_s]=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_a^b\|\gamma_s(t)\|_g dt=\int_a^b\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sqrt{g(\gamma_s'(t),\gamma_s'(t))}dt\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b g(\gamma_0'(t),\gamma_0'(t))^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}g(\gamma_s'(t),\gamma_s'(t))dt=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left(g_{ij}(\gamma_s(t))\frac{d\gamma_s^i}{dt}\frac{d\gamma_s^j}{dt}\right)dt\\
&\qquad=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\frac{\partial\gamma_s^k(t)}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{d\gamma_0^i}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt}+g_{ij}(\gamma_0(t))\frac{\partial^2\gamma_s^i(t)}{\partial s\partial t}\Big|_{s=0}\frac{d\gamma_0^j}{dt}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+g_{ij}(\gamma_0(t))\frac{\partial^2\gamma_s^j(t)}{\partial s\partial t}\Big|_{s=0}\frac{d\gamma_0^i}{dt}\right\}dt.
\end{aligned}\tag{3.18}$$

由分部积分

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_{ij}(\gamma_0(t))\frac{d\gamma_0^j}{dt}\frac{\partial^2\gamma_s^i(t)}{\partial s\partial t}\Big|_{s=0}dt&=\frac{\partial\gamma_s^i(t)}{\partial s}\Big|_{s=0}g_{ij}(\gamma_0(t))\frac{d\gamma_0^j(t)}{dt}\Big|_a^b\\
&-\int_a^b\frac{\partial\gamma_s^i(t)}{\partial s}\Big|_{s=0}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\gamma_0(t))\frac{d\gamma_0^k}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt}+g_{ij}(\gamma_0(t))\frac{d^2\gamma_0^j}{dt^2}\right\}dt.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

当$t=a$或b时, $\frac{\partial\gamma_s^i(t)}{\partial s}\Big|_{s=0}=0$, 所以

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}L[\gamma_s]=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\partial\gamma_s^k}{\partial s}\Big|_{s=0}\cdot\Big\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{d\gamma_0^k}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt} \\ -\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{d\gamma_0^i}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{d\gamma_0^i}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt}-2g_{ki}\frac{d^2\gamma_0^i}{dt}\Big\}dt. \quad (3.20)$$

下面的引理是数学分析中的一道简单的习题。

引理 3.2.1. 若对$\forall f\in C^\infty([a,b])$, $f(a)=f(b)=0$, $s.t.$ $\int_a^b\langle f(x),g(x)\rangle dx=0$, 且$g\in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$连续,则$g\equiv 0$.

根据前面的引理，因为$\frac{\partial\gamma_s}{\partial s}\Big|_{s=0}$可取任何沿$\gamma_0(t)$的向量场, 所以对$\forall k$, 有

$$g_{ki}\frac{d^2\gamma_0^i}{dt}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right\}\frac{d\gamma_0^i}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt}=0. \quad (3.21)$$

由于$G=(g_{ij})$正定,令$G^{-1}:=(g^{ij})$,则$g^{lk}\cdot g_{ki}=\delta_i^l$,从而(3.21)式为

$$\frac{d^2\gamma_0^l}{dt}+\frac{1}{2}g^{lk}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right\}\frac{d\gamma_0^i}{dt}\frac{d\gamma_0^j}{dt}=0.$$

令

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}). \quad (3.22)$$

我们有

定理 3.2.2. 如果弧长参数曲线$\gamma:[a,b]\to M$是连接$p,q\in M$两点的最短光滑曲线, 则该曲线一定满足测地线方程:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0,\quad \forall 1\le k\le n. \quad (3.23)$$

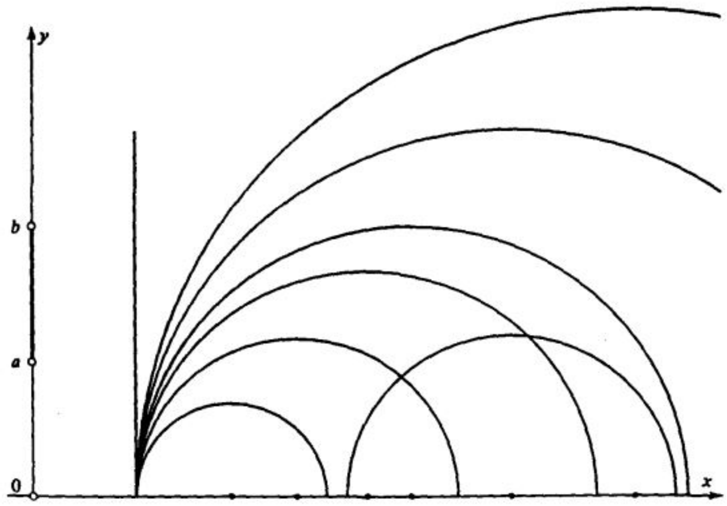
定义 3.2.3 (测地线)**.** 满足测地线方程(3.23)的光滑曲线$\gamma(t)$称为测地线(geodesic),如果还满足$\|\gamma'(t)\|_g\equiv 1$,则称为正规(normal)测地线.

命题 3.2.4. 对流形上的任一点$p\in M$, $\forall X\in T_pM$, 流形上局部存在唯一一条测地线$\gamma(t)$,使得$\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=X$.

证明. 由方程(3.23)的局部存在唯一性可知。 □

例 3.2.5. 带有标准欧氏度量的n维欧氏空间中的所有测地线为$\mathbb{R}^n$中的直线。这是因为$\Gamma_{ij}^k\equiv 0$, 测地线方程退化为 $\ddot{\gamma}\equiv 0$. 所以欧氏空间中两点之间直线最短。

例 3.2.6. 带有Poincaré度量的上半平面的所有测地线为圆心在x轴上的半圆和与y轴平行的直线(解测地线方程即可得到，此处略去)。



3.3 曲面上的测地线

在曲面上，测地线有更直接的表示。

我们考虑曲面S上的弧长参数曲线$\gamma(s)$. 设$\mathbf{n}$ 为S的法向.

记$\mathbf{e} = \mathbf{n} \times \dot{\gamma}$. 因$|\dot{\gamma}| = 1$, $\dot{\gamma} \perp \mathbf{n}$, 有$|\mathbf{e}| = 1$. 因$\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$, 所以$\ddot{\gamma}(s)$落在$\mathbf{n}$ 与$\mathbf{e}$ 张成的平面内。

回忆：

$$\kappa_n = \langle \ddot{\gamma}(s), \mathbf{n} \rangle \tag{3.24}$$

为曲线切向对应的法曲率。我们记

$$\kappa_g = \langle \ddot{\gamma}(s), \mathbf{e} \rangle. \tag{3.25}$$

则有

$$\ddot{\gamma}(s) = \kappa_g \mathbf{e} + \kappa_n \mathbf{n}. \tag{3.26}$$

因曲线曲率为

$$\kappa = |\ddot{\gamma}(s)|, \tag{3.27}$$

故

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2. \tag{3.28}$$

在之前的课程中我们已经详细讨论过法曲率κ_n，我们现在来看κ_g．设$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$是曲面的一个参数表示。由曲面自然标架的运动方程，

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\mathbf{r}_1\frac{dx^1}{ds} + \mathbf{r}_2\frac{dx^2}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\mathbf{r}_i\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} + \mathbf{r}_i\frac{d^2x^i}{ds^2} \\ &= \Gamma_{ij}^k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_i\frac{d^2x^i}{ds^2} + b_{ij}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\mathbf{n} \\ &= \left(\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\right)\mathbf{r}_k + b_{ij}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

由(3.25),

$$\kappa_g\mathbf{e} = \left(\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\right)\mathbf{r}_k. \tag{3.30}$$

命题 3.3.1. *曲面上曲线γ是一条测地线当且仅当$\kappa_g = 0$. 我们称κ_g为***测地曲率***.*

直观上看，曲面上曲线的弯曲由两部分组成：法曲率由曲面弯曲产生；测地曲率是曲线自身在曲面内的弯曲程度。

例 3.3.2. 任何曲面上的直线都是测地线。

这是因为直线满足$\ddot{\gamma}(s) \equiv 0$.

例 3.3.3. 柱面上的测地线

由定理3.2.2可知，若寻找柱面上任两点间的测地线，把柱面剪开，展开成平面，两点间的直线即为测地线。

例 3.3.4. 单位球面上的测地线

由(3.26)知，曲线为测地线当且仅当 $\ddot{\gamma}(s)//\mathbf{n}$. 所以曲线的所有主法线过原点。所以球面的测地线就是过球心的平面与球面所交出的圆，称为球面的大圆。

我们考虑例3.2.5, 3.2.6, 3.3.4 三个例子。

对于2维平面，过测地线外一点只有唯一一条测地线与原来那条不交。

对于单位球面，过测地线外一点不存在测地线与原来那条不交。

对于带有Poincaré度量的上半平面，过测地线外一点有无数条测地线与原来那条不交。

这三个例子对应了非欧几何的三个模型。